

MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

SOLUTION METHODS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

E. Reza Gurrola¹, J. O. Valle Martínez², V. A. Galván Sánchez³,
E. S. Bañuelos Cabral⁴, J. A. Gutiérrez Robles⁵

[1eduardoreza@hotmail.com](mailto:eduardoreza@hotmail.com) / [2valle.juan9411@gmail.com](mailto:valle.juan9411@gmail.com) / [3veronica.galvan@academicos.udg.mx](mailto:veronica.galvan@academicos.udg.mx) /
[4eduardo.banuelos@academicos.udg.mx](mailto:eduardo.banuelos@academicos.udg.mx) / [5jose.gutierrez@cucei.udg.mx](mailto:jose.gutierrez@cucei.udg.mx)

Recibido: octubre 18, 2019 / Aceptado: noviembre 15, 2019 / Publicado: enero 15, 2020

Resumen. En este trabajo se presentan y analizan los métodos más comunes para la solución tanto de una ecuación diferencial ordinaria de alto orden como de un sistema de ecuaciones diferenciales. Los métodos presentados son la transformación de Laplace, el método directo en tiempo, la transformada z , diferencias finitas, ecuaciones en diferencias y los siguientes métodos numéricos: Euler, regla trapezoidal y Runge-Kutta. Se muestra a detalle el desarrollo y la aplicación de cada método. Se presentan dos casos de prueba para mostrar las ventajas y desventajas de cada metodología: el modelado de una red eléctrica mediante una ecuación diferencial de alto orden y el modelado de una red eléctrica mediante la solución del sistema en variables de estado. En el documento se muestra la desviación de los resultados tomando como referencia la solución mediante la transformación de Laplace, se analizan los resultados y se presentan conclusiones.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales, transformación de Laplace, transformada z , ecuaciones en diferencias, Euler, regla trapezoidal, Runge-Kutta.

Abstract. In this paper the most common methods for the solution of both a high-order ordinary differential equation and systems of differential equations are presented and analyzed. The presented methods are the Laplace transformation, the direct method, the z transform, finite differences, difference equations and the following numerical methods: Euler, trapezoidal rule, and Runge-Kutta. The paper shows in detail the development and application of each method. Two test cases are presented to show the advantages and disadvantages of each methodology: the modeling of an electrical network using a high-order differential equation and the modeling of an electrical network by solving the system in state variables. The document shows the deviation of the results taking as reference the solution through Laplace transformation. The results are analyzed and conclusions are presented.

Key Words: Differential equations, Laplace transformation, z -transform, difference equations, Euler, trapezoidal rule, Runge-Kutta.

1. Introducción

La mayoría de los fenómenos físicos que se pueden modelar con formulaciones fisicomatemáticas evolucionan en espacio y/o en tiempo, aunque existe una gama de fenómenos que sólo evolucionan en espacio o en tiempo. De manera natural, algunos sistemas almacenan y/o ceden energía en alguna de las siguientes formas: mecánica, cinética, potencial, gravitacional, acústica, eléctrica, térmica, química, magnética, nuclear, radiante, eólica, solar, hidráulica o lumínica. Las relaciones fisicomatemáticas de estos sistemas comúnmente se modelan mediante ecuaciones diferenciales, las cuales son parciales si dependen de más de una variable independiente y/u ordinarias si sólo dependen de una variable independiente (espacio o tiempo). Para el caso de los sistemas que dependen de una sola variable, la cantidad de elementos que almacenan y/o ceden energía definen el orden de la ecuación o el tamaño de los sistemas de ecuaciones que modelan el fenómeno físico. Este trabajo se enfoca en el modelado de circuitos eléctricos concentrados, es

decir, que sólo evolucionan en tiempo; así, el modelo resultante es una ecuación diferencial ordinaria de alto orden (EDOAO) o un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario (SEDO).

Los métodos de solución que se han desarrollado a la fecha se aplicaron inicialmente a ecuaciones simples o de bajo orden; así, de manera intuitiva el primero de ellos fue desarrollado por Leonard Euler [1]. Cabe mencionar que Isaac Newton le dio formalidad matemática al cálculo integrodiferencial, por lo que la primera formulación analítica formal se dio con la formación de la teoría de grupos para ecuaciones diferenciales [2]. Pierre-Simón Laplace, un siglo después de que Newton desarrollara el cálculo diferencial e integral, asentó la teoría para la solución de este tipo de ecuaciones mediante lo que hoy se conoce como la transformada de Laplace [3]. Años después se desarrolló la teoría de la transformada z , la cual se basa en las series de Pierre Alphonse Laurent [4]. A partir de esta teoría se desarrolló un método denominado ecuaciones en diferencias que aprovecha el esquema en plano discreto que se obtiene de la aplicación de la transformada z [5]. Alrededor del siglo XIX, los alemanes Carl David Tolmé Runge y Martin Wilhelm Kutta desarrollaron un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para aproximar la solución al problema de valor inicial de una ecuación o un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias [6]. Aunque existen otros métodos de solución como el método de Taylor, métodos multipaso, variación de parámetros, factor integrante, cuadraturas, variables separables, entre los más conocidos, la mayoría no son de uso general o, como es el caso de los métodos multipaso, no se puede garantizar la estabilidad numérica para los métodos de alto orden. Adicionalmente, debido a la dificultad de obtener las condiciones iniciales necesarias para su implementación, no se analizan en este trabajo. Así, el objetivo principal de este trabajo es estudiar los métodos más utilizados para la solución de una ecuación diferencial de alto orden y para un sistema de ecuaciones diferenciales con el propósito de presentar una comparación y analizar los resultados.

2. Métodos de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias de alto orden

Normalmente, una ecuación diferencial ordinaria se resuelve analíticamente ya que este resultado se asocia a una solución exacta. Sin embargo, para el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias de alto orden (EDOAO) la solución analítica conlleva el cálculo de raíces de un polinomio del mismo orden que la ecuación diferencial, y esto se tiene que hacer de manera numérica; este cálculo es bastante sensible a errores numéricos [7]. De hecho, no es predecible saber si el resultado final tendrá más error debido al cálculo de las raíces o a otro tipo de implementaciones. Por esta razón, en esta sección se aborda la solución analítica, métodos semianalíticos y métodos numéricos para la solución de una EDOAO.

2.1 Métodos analíticos

Existen dos formas tradicionales de resolver una ecuación diferencial ordinaria de alto orden: la transformación de Laplace [8, 9] y la solución directa en el dominio del tiempo mediante la aplicación de algún método como el de coeficientes indeterminados [6, 10]; en esta sección se describen ambos métodos de manera breve, junto con el método semianalítico de la transformada z [11] y algunos métodos numéricos como el de ecuaciones en diferencias o diferencias finitas [12, 13, 14].

2.1.1 Transformación de Laplace

Se considera la EDOAO con coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^N a_k w^{(k)} = f(t) \tag{1}$$

donde a_k son los coeficientes, $w^{(k)}$ son las késimas derivadas de la variable dependiente, t es la variable independiente y $f(t)$ es la función de entrada. Si se denotan las condiciones iniciales de la variable dependiente como

$$w^m(0) = w_0^m \quad \text{con } 0 \leq m \leq M - 1 \tag{2}$$

la transformada de Laplace de (1) es

$$\sum_{k=0}^N (a_k s^k) W(s) - \sum_{k=0}^N \left(\sum_j^{k-1} s^{k-j-1} a_k w^{(j)}(0) \right) = F(s) \tag{3}$$

Si se despeja $W(s)$ de (3) se llega a

$$W(s) = \frac{F(s) + \sum_{k=0}^N \left(\sum_j^{k-1} s^{k-j-1} a_k w^{(j)}(0) \right)}{\sum_{k=0}^N (a_k s^k)} \tag{4}$$

La solución de (1) se obtiene mediante la expansión en fracciones parciales de (4) para tener elementos simples a los cuales se les aplica la transformada inversa de Laplace y llegar a una solución de la forma

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} \tag{5}$$

2.1.2 Solución en el dominio del tiempo (método de coeficientes indeterminados)

La solución directa de (1) se divide en dos partes, la solución homogénea que se obtiene al hacer $f(t)=0$ en (1) y la solución particular que depende de $f(t)$. Para obtener la solución homogénea se propone una solución del tipo

$$w(t) = w_t = e^{rt} \tag{6}$$

donde e es la función exponencial y r es una constante. Las derivadas sucesivas de (6) son de la forma

$$w_t^{(k)} = r^k e^{rt} \tag{7}$$

Para $0 \leq k \leq N$, al sustituir (7) en (1) se obtiene el polinomio característico o ecuación auxiliar

$$\sum_{k=0}^N a_k r^k e^{rt} = e^{rt} \sum_{k=0}^N a_k r^k = 0 \quad (8)$$

En (8), como $e^{rt} \neq 0$, la sumatoria necesariamente es igual a cero, por lo que por medio del teorema fundamental del algebra [15] se tienen n soluciones (raíces) de (1) agrupadas de la forma

$$w_t = \sum_{k=0}^N c_k e^{r_k t} \quad (9)$$

La segunda parte de la solución tiene que ver con la $f(t)$ de la ecuación (solución particular). Aquí se propone una función del mismo tipo que $f(t)$ y se encuentran los coeficientes que la ajustan. La suma de ambas soluciones, homogénea y particular, conforman la solución total de la ecuación diferencial [6, 7].

2.2 Métodos semianalíticos

Se puede decir que el método de la transformada z es semianalítico ya que parte de una metodología analítica hasta llegar a una representación numérica. La técnica de transformación constituye una herramienta importante en el análisis de las señales y sistemas lineales invariantes en el tiempo (LIT). La transformada z proporciona un medio para caracterizar los sistemas LIT y su respuesta a diversas señales mediante las posiciones de sus polos y ceros. La transformada z unilateral de una señal discreta en el tiempo $x(n)$ se define como la serie de potencias [16]

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (10)$$

donde z es una variable compleja $z = Ae^{i\omega} = Ae^{i2\pi f}$ con ω igual a la frecuencia angular en radianes por segundo y f igual a la frecuencia en Hertz. A (10) se le denomina transformada z directa, ya que transforma la señal en tiempo $x(n)$ en su representación en el plano complejo $X(z)$. La transformada z de una señal $x(n)$ y la transformada z inversa de una señal $X(z)$ se designan respectivamente como

$$X(z) = Z\{x(n)\} \quad \text{y} \quad (11a)$$

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} \quad (11b)$$

Ya que la transformada z es una serie infinita de potencias, sólo existe para aquellos valores de z para los que la serie converge [16]. Para realizar la transformación inversa de una ecuación en el plano z se utiliza la técnica de fracciones parciales. Se puede expresar la función $X(z)$ como la combinación lineal

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k X_k(z), \quad (12)$$

donde $X_k(z)$ son expresiones cuyas transformaciones inversas son $x_k(n)$. Si la descomposición en (12) es posible, entonces $x(n)$ es la transformada z inversa de $X(z)$ mediante la combinación lineal

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k(n). \quad (13)$$

Este método es particularmente útil si $X(z)$ es una función racional de la forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad (14)$$

donde $a_0 = 1$ y $M < N$. Primero se descompone $D(z)$ en factores que contengan los polos p_k de $X(z)$. Existen los casos de polos distintos y polos repetidos. Para el caso donde los polos son distintos, la expansión en fracciones parciales queda de la forma

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad (15)$$

donde hay que determinar los coeficientes A_k . La transformada z inversa de $X(z)$ en (15) se puede obtener al invertir todos términos de la sumatoria. Dichos términos se pueden invertir mediante la fórmula

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - p_k z^{-1}} \right\} = (p_k)^n u(n). \quad (16)$$

En este caso, la señal $x(n)$ está dada por

$$x(n) = \left[\sum_{k=1}^N A_k (p_k)^n \right] u(n). \quad (17)$$

En el caso de que existir polos complejos conjugados, entonces se producen exponenciales complejas; sin embargo, si la señal $x(n)$ es real, es posible reducir dichos términos a componentes reales. Si

p_j y p_j^* y son un par de polos complejos conjugados al igual que los coeficientes asociados de las fracciones parciales, A_j y A_j^* , su contribución es de la forma

$$x_k(n) = [A_j(p_j)^n + A_j^*(p_j^*)^n] u(n), \quad (18)$$

y su combinación en forma real es

$$x_k(n) = 2|A_k|r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n), \quad (19)$$

donde los polos y los coeficientes se encuentran expresados en forma polar como $A_k = |A_k|e^{i\alpha_k}$ y $p_k = r_k e^{i\beta_k}$. Así, cada par complejo conjugado en dominio z produce una señal sinusoidal causal con una envolvente exponencial. En el caso donde se tienen polos múltiples, reales o complejos, la transformada inversa es de la forma,

$$Z^{-1} \left\{ \frac{p z^{-1}}{(1 - p z^{-1})^k} \right\} = n^{k-1} p^n u(n). \quad (20)$$

Para el caso donde se tiene una ecuación diferencial del tipo:

$$a_0 + a_1 \frac{dw}{dt} + a_2 \frac{d^2 w}{dt^2} + \dots + a_k \frac{d^k w}{dt^k} = f(t), \quad (21)$$

se aplica primero la transformada de Laplace y se hace el mapeo del dominio s al dominio z mediante alguna

definición de s ; por ejemplo, con regla trapezoidal o Tustin $s = \frac{2}{\Delta t} \frac{z-1}{z+1}$ [5]. Con esta sustitución, (21) quedaría como $W(z)$ de la forma descrita en (14) y su transformada z inversa sería $w(n) = Z^{-1}\{W(z)\}$.

2.3 Métodos numéricos

La implementación numérica de una ecuación diferencial ordinaria de alto orden se hace mediante diferencias finitas. La primera derivada se aproxima con

$$w'_n = \frac{w_{n+1} - w_n}{h}, \quad (22)$$

donde h tiene un valor determinado. De (22) se puede obtener la forma recursiva para una derivada de N -ésimo orden como

$$w^{(N)} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{(-1)^k}{h^N} w_{n+N-k} . \quad (23)$$

Una ecuación diferencial lineal de orden N tiene la forma de (1), por lo que el esquema en diferencias para dicha ecuación es

$$\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j}{h^k} w_{n+k-j} = f_n . \quad (24)$$

Si se despeja w_{n+N} de (24) se obtiene la expresión

$$w_{n+N} = \frac{h^N}{a_N} \left(f_n - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{a_k (-1)^j}{h^k} w_{n+k-j} - \sum_{j=1}^N \binom{N}{j} \frac{a_N (-1)^j}{h^N} w_{n+N-j} \right) . \quad (25)$$

Para una concurrencia con una ecuación de orden N son necesarias $N-1$ condiciones iniciales, lo cual genera una solución única a la ecuación diferencial (1).

2.4 Ecuaciones en diferencias

Al construir el modelo matemático de algún fenómeno interesan cuestiones numéricas y computacionales, así es necesario elegir una variable con valores discretos. Estos datos serían elementos de un conjunto finito, o en su defecto infinito numerable. Para este tipo de modelos determinísticos discretos, las herramientas matemáticas más adecuadas para analizarlos son las ecuaciones en diferencias cuya expresión es del tipo

$$F(w_{n+N}, w_{n+N-1}, \dots, w_{n+1}, w_n, n) = 0 \rightarrow \forall n \in N , \quad (26)$$

donde el orden de esta ecuación es el valor de la diferencia entre el mayor con el menor de los índices de F . Una ecuación en diferencias se dice lineal con coeficientes constantes si se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^N a_k w(n+k) = f(n) , \quad (27)$$

donde $a_k \in R$. El objetivo es hallar una función $w(n)$ que verifique que la ecuación para valores distintos tome valores dados c_j , tal que la solución sea única. Esta solución $w(n)$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación en diferencias, donde la solución total es combinación lineal de estas, es decir, si $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ son soluciones, entonces lo es la combinación. Así se tiene

$$w(n) = \sum_{j=1}^k c_j w_j(n) \quad (28)$$

Para una ecuación en diferencias con $f(n) = 0$ se busca una solución del tipo $w(n) = r^n$. Así, al sustituir la solución en (27) se obtiene

$$\sum_{k=0}^N a_k r^{n+k} = r^n \sum_{k=0}^N a_k r^k = 0 \quad (29)$$

lo que implica que,

$$\sum_{k=0}^N a_k r^k = 0 \quad (30)$$

En (30), r^k son las raíces de la ecuación en diferencias. Estas raíces pueden ser reales y distintas, reales repetidas y/o complejas conjugadas. La solución con $f(n)=0$ es [16],

$$w_h(n) = r_1^n P_{m-1}(n) + \sum_{k=m+1}^{N-2} c_k r_k^n + \rho^n (b_1 \cos(\theta n) + b_2 \operatorname{sen}(\theta n)) \quad (31)$$

Con un solo par de raíces complejas conjugadas $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ donde $\rho = r$ y $\theta = \arctan(\beta/\alpha)$. Se tiene también $P_{m-1}(n) = c_1 + c_2 n + \dots + c_m n^{m-1}$, donde el grado depende de la multiplicidad de las raíces. Para encontrar la solución completa es necesario estimar la solución particular, la cual depende de la naturaleza de la función $f(n)$ definida en la ecuación en diferencias.

2.4.1 A partir de la transformada z

Una ecuación en diferencias puede partir de la función de transferencia en z

$$H(z) = \frac{W(z)}{F(z)} = \frac{k_N z^N + k_{N-1} z^{N-1} + \dots + k_1 z + k_0}{c_M z^M + c_{M-1} z^{M-1} + \dots + c_1 z + c_0}, \quad (32)$$

donde N y M son el grado del numerador y denominador respectivamente. Generalmente, si se utiliza la transformación bilineal dada por la regla trapezoidal estos son iguales [16]. Si se multiplican el numerador y denominador de (32) por z^{-N} y se acomodan algebraicamente, se llega a

$$W(z) [c_N + c_{N-1} z^{-1} + \dots + c_1 z^{-N+1} + c_0 z^{-N}] = F(z) [k_N + k_{N-1} z^{-1} + \dots + k_1 z^{-N+1} + k_0 z^{-N}]. \quad (33)$$

Por lo tanto, (21) queda en diferencias como

$$c_N W_n + c_{N-1} W_{n-1} + \dots + c_1 W_{n-N+1} + c_0 W_{n-N} = k_N F_n + k_{N-1} F_{n-1} + \dots + k_1 F_{n-N+1} + k_0 F_{n-N}, \quad (34a)$$

o bien,

$$c_N w(n) + c_{N-1} w(n-1) + \dots + c_1 w(n-N+1) + c_0 w(n-N) = k_N f(n) + k_{N-1} f(n-1) + \dots + k_1 f(n-N+1) + k_0 f(n-N). \quad (34b)$$

2.4.2 A partir de diferencias finitas de Newton

Una ecuación diferencial lineal $\sum_{k=0}^N a_k w^{(k)}(t) = f(t)$ de orden N expresada en diferencias finitas

tiene la forma $\sum_{k=0}^N \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k \frac{(-1)^j}{h^k} w_{n+k-j} = f_n$ [16]. Si se desarrollan todos los términos y se agrupan algebraicamente se obtiene una ecuación del tipo

$$a_N w_n + a_{N-1} w_{n-1} + \dots + a_1 w_{n-N+1} + a_0 w_{n-N} = f_n. \quad (35)$$

3. Métodos de solución para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Considere el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en variables de estado [17]

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bf} \quad \text{y} \quad (36)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Df}, \quad (37)$$

donde (36) es la ecuación de estados y (37) es la ecuación de las salidas que se quieren obtener. (36) se puede resolver de forma analítica y de forma numérica; en la siguiente sección se da una breve descripción de ambas.

3.1 Métodos analíticos

Existen dos formas tradicionales de obtener la solución analítica de un SEDO: la transformación de Laplace [18, 19, 20, 17] y la solución directa [17]. En esta sección se describen ambos métodos de manera breve.

3.1.1 Solución mediante la transformada de Laplace

La k -ésima ecuación de (36) se puede expandir como:

$$\dot{x}_k = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + b_{k1}f_1 + \dots + b_{km}f_m. \quad (38)$$

La transformada de Laplace de (38) es

$$sX_k(s) - x_k(0) = a_{k1}X_1(s) + \dots + a_{kn}X_n(s) + b_{k1}F_1(s) + \dots + b_{km}F_m(s). \quad (39)$$

La transformada de Laplace de (36), en forma matricial, es

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s). \quad (40)$$

Si se despeja $\mathbf{X}(s)$ de (40) se llega a

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s)], \quad (41)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Si se define $\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, entonces la solución de (36) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}(0)] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)]. \quad (42)$$

Se puede observar en (42) que la primera componente de la solución $\mathbf{x}(t)$ es la solución de entrada cero y la segunda componente es la solución de estado cero. Si se sustituye (42) en (37), la ecuación de salida es

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}(0) + \Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{F}(s)] + \mathbf{D}\mathbf{f}(t). \quad (43)$$

3.1.2 Solución en dominio del tiempo

La solución directa del SEDO descrito por (36) tiene la estructura [17]

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (44)$$

La solución dada por (44) se puede expresar de manera más conveniente en términos de la convolución matricial mediante

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + e^{At} * \mathbf{B} \mathbf{f}(t) \quad (45)$$

La ecuación de salida se puede expresar como [17]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{At} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} e^{At} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t)] * \mathbf{f}(t) \quad (46)$$

donde $\delta(t)$ es una matriz diagonal cuyos términos en la diagonal son funciones impulso unitario.

3.2 Métodos numéricos

Existen un sinnúmero de esquemas numéricos, por lo aquí se adoptan los más conocidos o populares como son el método de Euler, la regla trapezoidal y los métodos Runge-Kutta, con el fin de establecer una comparación entre ellos y las soluciones analíticas.

3.2.1 Método de Euler

Se introduce un partición sobre el intervalo de tiempo (t_0, t_N) , creando una malla de puntos donde t_0 es el tiempo inicial y $t_N = t_0 + \alpha$ es el tiempo final tal que $t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_N$, donde $h = t_{k+1} - t_k$ es la distancia entre dos puntos consecutivos. Si $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$, entonces las diferencias del SEDO dadas por (22) se establecen como

$$\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h} = \mathbf{A} \mathbf{x}_n + \mathbf{B} \mathbf{f}_n \quad (47)$$

Si se despeja el término \mathbf{x}_{n+1} de (47) se obtiene

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{k}_1 \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2 \mathbf{f}_n, \quad (48)$$

donde $\mathbf{k}_1 = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})$ y $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{B}$.

TEOREMA 1.- Sea $L > 0$ y $f : R \times R^n \rightarrow R$ una función de Lipschitz, es decir:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L \|x - y\|,$$

donde $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ y $(x, y \in R)$. Si se supone además que $y(t) \in C^2([t_0, t_0 + \alpha])$ y existe $M > 0$ tal que

$$|y(t_k) - y_k| \leq \frac{hM}{2L} (e^{L(t_k - t_0)} - 1),$$

el error de redondeo al paso del tiempo puede ser notable. No obstante, para el método de Euler y tomando en cuenta el TEOREMA 1 se demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 2.- Suponiendo que se cumple el TEOREMA 1 y además que en cada paso el error de redondeo al evaluar el método de Euler es ε_k , entonces:

$$|y(t_k) - y_k| \leq \left(\frac{hM}{2L} + \frac{\varepsilon}{hL} \right) (e^{L(t_k - t_0)} - 1) + \varepsilon_0 e^{L(t_k - t_0)},$$

donde ε es una cota superior de ε_k y ε_0 es el error de redondeo del dato inicial. De lo anterior resulta que el error no está acotado cuando h tiende a cero debido al factor (ε/hL) , por lo tanto el resultado que se obtiene para pasos cuya longitud es menor que cierto valor son poco confiables o cuando sobrepasan un umbral.

3.2.2 Método de Euler-Modificado o regla trapezoidal

Este método es similar al de Euler salvo que en la parte derecha del SEDO se toman los promedios entre los tiempos t_k y t_{k+1} . Las diferencias dadas por (22) son

$$\frac{\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n}{h} = \mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n}{2} + \mathbf{B} \frac{\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n}{2}. \quad (49)$$

Si se despeja el término \mathbf{x}_{n+1} de (49) se obtiene

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{k}_1 \mathbf{x}_n + \mathbf{k}_2 (\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n), \quad (50)$$

donde $\mathbf{k}_1 = (\mathbf{I} - h\mathbf{A}/2)^{-1}(\mathbf{I} + h\mathbf{A}/2)$ y $\mathbf{k}_2 = (\mathbf{I} - h\mathbf{A}/2)^{-1}(h\mathbf{B}/2)$. Este método, a diferencia del método de Euler, involucra la inversión de un sistema matricial, por lo que en ocasiones puede ser una mejora al método de Euler o dificultarse su implementación si la inversa de la matriz queda mal condicionada [7].

3.2.3 Método de Runge-Kutta

Este método es una generalización de los métodos anteriores y tiene la forma [7]

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{m=1}^M w_m k_m, \quad (51)$$

donde $h = t_{n+1} - t_n$, $k_1 = f(t_n, x_n)$ y $k_m = f\left(t_n + h\alpha_m, x_n + h \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{mj} k_j\right)$. Los parámetros α_m y w_m , así como los que intervienen para calcular cada aproximación intermedia β_{mj} , se determinan de forma que coincidan con los primeros términos de la serie de Taylor. De esta forma, para $M = 2$ en (51) se obtiene,

$$x_{n+1} = x_n + h(w_1 k_1 + w_2 k_2), \quad (52)$$

donde $k_1 = f(t_n, x_n)$ y $k_2 = f(t_n + h\alpha_2, x_n + h\beta_{21}k_1)$. Si se realiza una expansión en series de Taylor de dos términos para k_2 se llega a

$$k_2 = f(t + h\alpha, x + h\beta k) = f(t, x) + h\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta k \frac{\partial}{\partial x}\right) f(t, x). \quad (53)$$

Si por notación se tiene que $f = f(t, x)$, $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ y $f_t = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$ entonces $k_2 = f + h\alpha_2 f_t + h\beta_{21} k_1 f_x$. Al sustituir k_1 y k_2 en (52) se llega a

$$x_{n+1} = x_n + h(w_1 + w_2)f + h^2 w_2 (\alpha_2 f_t + \beta_{21} f_x f). \quad (54)$$

Adicionalmente, se considera la serie de Taylor de $f(t, x)$ hasta la primera derivada de x_{n+1} como

$$x_{n+1} = x_n + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + f_x f) \tag{55}$$

Si se comparan (54) y (55) se llega al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_2 \alpha_2 &= 1/2 \\ w_2 \beta_{21} &= 1/2 \end{aligned} \tag{56}$$

El sistema en (56) tiene un número infinito de soluciones, algunas de las cuales son muy conocidas [7]. Para efectos de implementación se adopta la solución $w_1 = w_2 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$ y $\beta_{21} = 1$ [7]. Con estos valores, (51) queda de la forma,

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + (h/2)(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \tag{57}$$

donde $\mathbf{k}_1 = f(t_n, \mathbf{x}_n)$ y $\mathbf{k}_2 = f(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_1)$.

4. Resultados y Discusiones

Se plantea la aplicación de los métodos descritos en las secciones 2 y 3 a dos tipos de problemas: el primero de ellos consiste en una ecuación diferencial ordinaria de alto orden, mientras que el segundo consiste en un sistema de ecuaciones.

4.1 Ejemplo 1

El circuito de la figura 1 es un ejemplo clásico de un circuito pi en cascada que puede provenir del ajuste de una línea de transmisión. Para este ejemplo se utilizaron valores ficticios para mostrar los métodos de EDOAO.

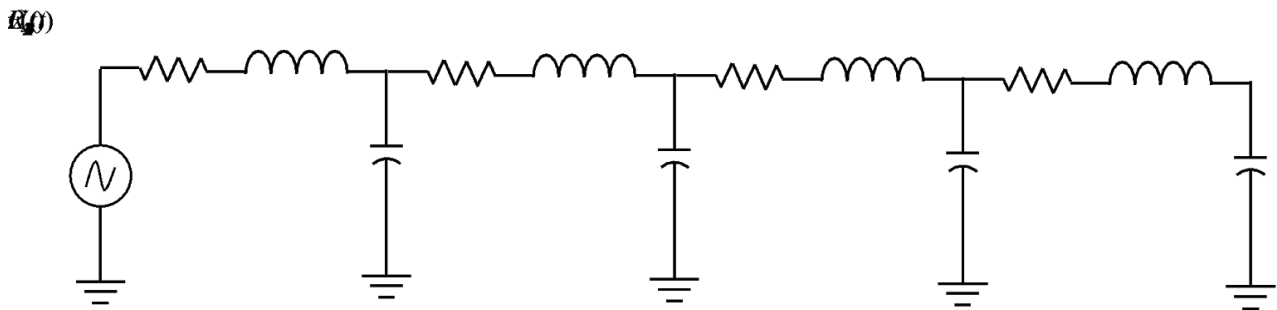


Figura 1.- Red eléctrica usada para el ejemplo 1, con $R = 2$, $L = 0.5$, $C = 0.1$ y $v(t) = \text{sen}(t)$.

El primer paso es obtener la función de transferencia y a partir de ella obtener ecuación de alto orden que describe el comportamiento del voltaje $v_4(t)$ el circuito de la figura. La ecuación que describe $v_4(t)$ es

$$\frac{d^8v}{dt^8} + 16\frac{d^7v}{dt^7} + 236\frac{d^6v}{dt^6} + 1936\frac{d^5v}{dt^5} + 12976\frac{d^4v}{dt^4} + 56960\frac{d^3v}{dt^3} + 176000\frac{d^2v}{dt^2} + 320000\frac{dv}{dt} + 160000 = 160000\text{sen}(t)$$

4.1.1 Solución analítica

La solución analítica se puede obtener mediante el método de coeficientes indeterminados o mediante la transformación de Laplace; la solución analítica es

$$v(t) = 2e^{-2t}(-0.0008\cos(8.1634t) + 0.0015\text{sen}(8.1634t)) + 2e^{-2t}(0.0053\cos(6.5533t) - 0.0077\text{sen}(6.5533t)) + 2e^{-2t}(-0.0354\cos(4t) + 0.0243\text{sen}(4t)) + 2(-0.3019\cos(t) - 0.0037\text{sen}(t)) - 0.1022e^{-3.26t} + 0.7677e^{-0.74t}$$

4.1.2 Solución por la transformada z

El primer paso para obtener la solución mediante la técnica de la transformada z es obtener la función de transferencia en z a partir de la función de transferencia en s. De la función de transferencia se obtiene la ecuación del voltaje de salida en z como,

$$V(z) = \frac{9.63 \times 10^{-12}z^{10} + 9.63 \times 10^{-11}z^9 + 4.43 \times 10^{-10}z^8 + 1.15 \times 10^{-9}z^7 + 2.02 \times 10^{-9}z^6 + 2.42 \times 10^{-9}z^5 + 2.02 \times 10^{-9}z^4 + 1.15 \times 10^{-9}z^3 + 4.33 \times 10^{-10}z^2 + 9.63 \times 10^{-11}z + 9.63 \times 10^{-12}}{z^{10} - 8.976z^9 + 36.48z^8 - 88.42z^7 + 141.6z^6 - 156.5z^5 + 120.9z^4 - 64.5z^3 + 22.73z^2 - 4.782z + 0.4559}$$

La función anterior se expande en fracciones parciales para obtener los polos, los residuos y la constante de proporcionalidad, de donde se obtiene

$$r = \begin{bmatrix} -0.0151 + 0.0002i \\ -0.0151 - 0.0002i \\ 0.0384 + 0.0000i \\ -0.0000 - 0.0001i \\ -0.0000 + 0.0001i \\ 0.0003 + 0.0004i \\ 0.0003 - 0.0004i \\ -0.0018 - 0.0012i \\ -0.0018 + 0.0012i \\ -0.0051 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} 0.9988 + 0.0500i \\ 0.9988 - 0.0500i \\ 0.9637 + 0.0000i \\ 0.8354 + 0.3567i \\ 0.8354 - 0.3567i \\ 0.8595 + 0.2901i \\ 0.8595 - 0.2901i \\ 0.8876 + 0.1798i \\ 0.8876 - 0.1798i \\ 0.8493 + 0.0000i \end{bmatrix}, \quad kp = 2.1127e-11 \quad \text{y} \quad h = 0.05$$

Con estos datos se conforma la solución de la ecuación diferencial como como $v(t) = \text{sum}(r \cdot \times p^n)$, donde n es el número de muestra y el $(\cdot \times)$ significa una operación vectorial elemento a elemento; se debe corregir la primera muestra con la constante de proporcionalidad con $v(1) = v(1) + kp/h$.

4.1.3.1 Solución mediante la ecuación en diferencias partiendo de la transformada z

Al hacer el proceso de tener una ecuación en diferencias partiendo de la transformada z se llega a la siguiente expresión,

$$v(n-0) - 6.97v(n-1) + 21.54v(n-2) - 38.41v(n-3) + 43.29v(n-4) - 31.56v(n-5) + 14.54v(n-6) - 3.87v(n-7) + 0.45v(n-8) = 1.54 \times 10^{-8} \text{sen}((n-0)h) + 1.23 \times 10^{-7} \text{sen}((n-1)h) + 4.31 \times 10^{-7} \text{sen}((n-2)h) + 8.63 \times 10^{-7} \text{sen}((n-3)h) + 1.07 \times 10^{-6} \text{sen}((n-4)h) + 8.63 \times 10^{-7} \text{sen}((n-5)h) + 4.31 \times 10^{-7} \text{sen}((n-6)h) + 1.23 \times 10^{-7} \text{sen}((n-7)h) + 1.54 \times 10^{-8} \text{sen}((n-8)h)$$

Si la parte derecha de la ecuación anterior se simplifica mediante la identidad

$$A \sin(n-k) = A \sin(n) \cos(k) - A \cos(n) \sin(k),$$

queda de la forma

$$v(n-0) - 6.97v(n-1) + 21.54v(n-2) - 38.41v(n-3) + 43.29v(n-4) - 31.56v(n-5) + 14.54v(n-6) - 3.87v(n-7) + 0.45v(n-8) = 3.8588 \times 10^{-6} \text{sen}(nh) - 7.8221 \times 10^{-7} \cos(nh).$$

La solución a esta ecuación es

$$v(t) = \text{sum}(c \cdot \times r^n) - 0.0076 \text{sen}(nh) - 0.6037 \cos(nh),$$

donde

$$c = \begin{bmatrix} -0.0007 - 0.0016i \\ -0.0007 + 0.0016i \\ 0.0050 + 0.0079i \\ 0.0050 - 0.0079i \\ -0.0350 - 0.0246i \\ -0.0350 + 0.0246i \\ 0.7672 - 0.0000i \\ -0.1021 - 0.0000i \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} 0.8354 + 0.3567i \\ 0.8354 - 0.3567i \\ 0.8595 + 0.2901i \\ 0.8595 - 0.2901i \\ 0.8876 + 0.1798i \\ 0.8876 - 0.1798i \\ 0.9637 + 0.0000i \\ 0.8493 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad h = 0.05$$

4.1.3.2 Solución mediante la ecuación en diferencias partiendo de diferencias finitas

Si se aplican diferencias divididas de Newton a todas las derivadas, se obtiene una ecuación en diferencias de la forma

$$69988 \times 10^6 v(n-0) - 47957888 \times 10^4 v(n-1) + 14492864 \times 10^5 v(n-2) - 252319232 \times 10^4 v(n-3) + 276841216 \times 10^4 v(n-4) - 19604992 \times 10^5 v(n-5) + 875264 \times 10^6 v(n-6) - 22528 \times 10^7 v(n-7) + 256 \times 10^8 v(n-8) = 160000 \operatorname{sen}(nh)$$

En el proceso de solución de esta ecuación con $h = 0.05$ se obtienen los coeficientes y las raíces

$$cd = \begin{bmatrix} -0.0068 - 0.0037i \\ -0.0068 + 0.0037i \\ 0.0239 + 0.0202i \\ 0.0239 - 0.0202i \\ -0.0592 - 0.0593i \\ -0.0592 + 0.0593i \\ 0.6996 \\ -0.0282 \end{bmatrix}, \quad rd = \begin{bmatrix} 0.7991 + 0.2965i \\ 0.7991 - 0.2965i \\ 0.8350 + 0.2487i \\ 0.8350 - 0.2487i \\ 0.8800 + 0.1600i \\ 0.8800 - 0.1600i \\ 0.9643 \\ 0.8598 \end{bmatrix},$$

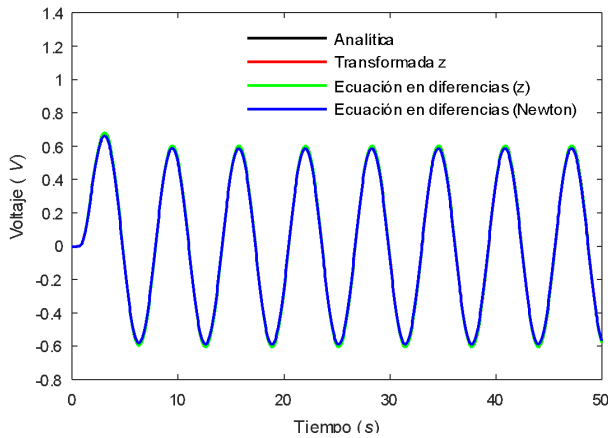
La solución se obtiene mediante la expresión

$$v(t) = \operatorname{sum}(cd \times rd^n) + (0.5971 \times 10^{-7}) \sin(nh) + (0.1847 \times 10^{-7}) \cos(nh).$$

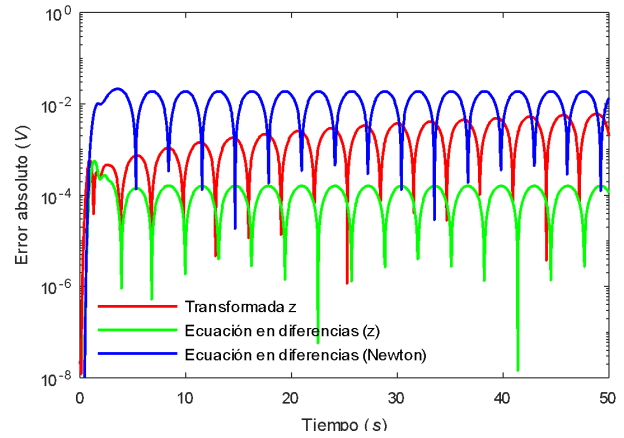
Esta implementación, aunque es estable, tiene un error considerable y por esa razón se recomienda obtener la ecuación en diferencias a partir de la transformada z .

4.1.4 Análisis de resultados

La figura 2 muestra los primeros ciclos de la simulación y el error absoluto al tomar como referencia la solución analítica obtenida mediante la transformación de Laplace.



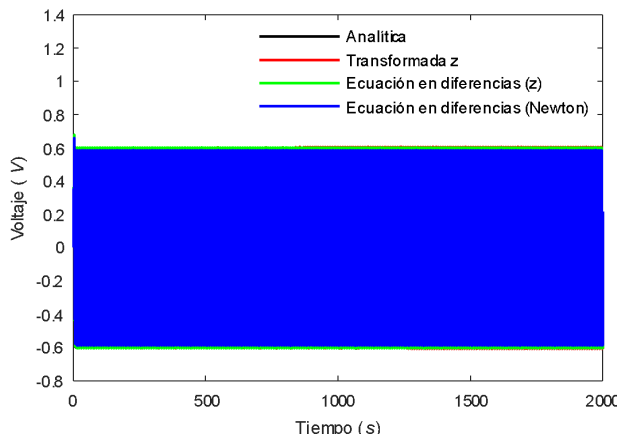
(a)



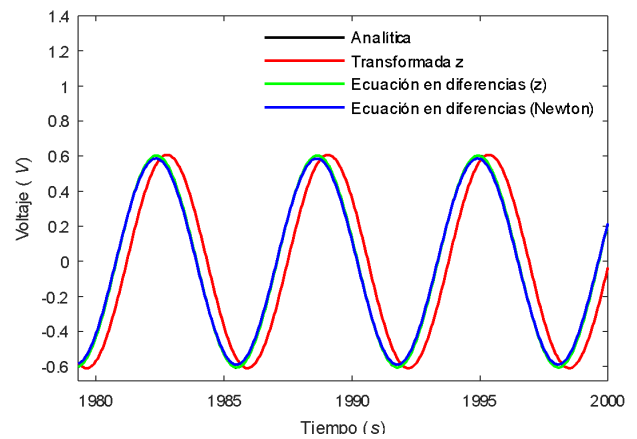
(b)

Figura 2. (a) Solución analítica mediante la transformación de Laplace, transformada z y ecuación en diferencias. (b) Error de las soluciones al tomar como referencia la solución analítica.

La figura 3 muestra la simulación a largo plazo, es decir hasta que en apariencia se estabilizan tanto los resultados obtenidos mediante la transformada z como los obtenidos mediante la ecuación en diferencias. A simple vista se puede notar como los resultados que se obtienen mediante la transformada z tienen un error creciente; la razón es que la fuente es una función seno y sus polos en transformada z deben quedar sobre el círculo unitario, es decir con un valor absoluto de 1. Sin embargo, si se analizan los polos que se obtienen, dos de ellos con un valor absoluto igual a 1.0000001826523. Este error, aunque es muy pequeño, se va elevando conforme se avanza en el número de muestras. Este error es estrictamente numérico, pero no se puede remover ya que es parte de todo el proceso numérico.



(a)



(b)

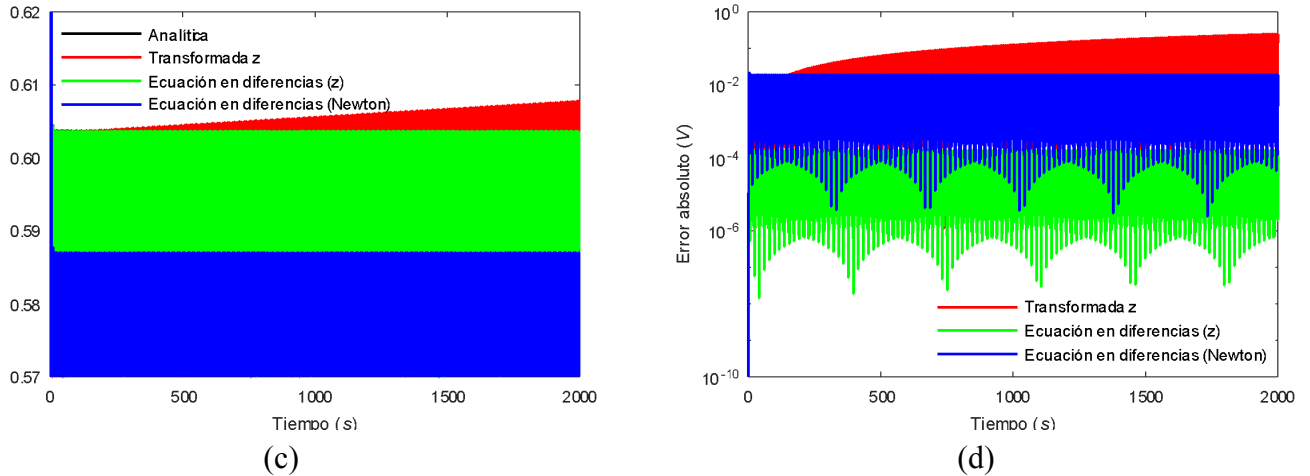


Figura 3. (a) Solución analítica mediante la transformación de Laplace, transformada z y ecuación en diferencias (z). (b) Acercamiento de las soluciones. (c) Acercamiento de las soluciones. (d) Error de las soluciones al tomar como referencia la solución analítica mediante Laplace.

4.2 Ejemplo 2

Se analiza el circuito mostrado en la figura 4, donde los parámetros son: $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 0.2 \Omega$, $L_1 = 1 H$, $L_2 = 0.5 H$, $C = 0.02 F$, $v_1(t) = 100\text{sen}(120\pi t) V$, $v_2(t) = 20\text{sen}(200\pi t + \pi/4) V$. Los estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ son respectivamente el voltaje en C, la corriente en L_1 y la corriente en L_2 . Las condiciones iniciales son: $x_1(0) = 1.2 V$, $x_2(0) = 0.8 A$ y $x_3(0) = 0 A$.

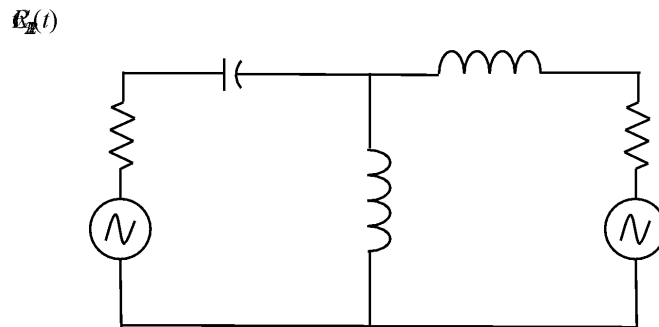


Figura 4.- Circuito con una doble fuente.

Al utilizar la metodología de variables de estado, se obtiene la ecuación de estados

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 50 \\ -1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & -1 & -1.4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100\text{sen}(120\pi t) \\ 20\text{sen}(200\pi t + \pi/4) \end{bmatrix}$$

4.2.1 Solución mediante la transformación de Laplace

La solución de entrada nula mediante la transformada de Laplace es

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}(0)] = \begin{bmatrix} 0.07e^{-0.13t} + 2e^{-0.88t}(0.56\cos(-12.21t) - 1.67\text{sen}(-12.21t)) \\ 0.53e^{-0.13t} + 2e^{-0.88t}(0.13\cos(-12.21t) + 0.05\text{sen}(-12.21t)) \\ -0.53e^{-0.13t} + 2e^{-0.88t}(0.26\cos(-12.21t) + 0.11\text{sen}(-12.21t)) \end{bmatrix},$$

mientras que la solución de estado nulo es,

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{BF}(s)] = \begin{bmatrix} 2e^{-0.88t}(-0.0025\cos(-12.21t) + 1.5384\text{sen}(-12.21t)) + 0.0020e^{-0.13t} \\ 2e^{-0.88t}(0.1403\cos(-12.21t) - 0.0073\text{sen}(-12.21t)) - 0.0151e^{-0.13t} \\ 2e^{-0.88t}(0.2505\cos(-12.21t) - 0.0204\text{sen}(-12.21t)) - 0.0149e^{-0.13t} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2(-0.0002\cos(120\pi t) - 0.05\text{sen}(120\pi t)) - 2(-0.0018\cos(200\pi t) - 0.0018\text{sen}(200\pi t)) \\ 2(-0.1328\cos(120\pi t) + 0.0005\text{sen}(120\pi t)) + 2(-1.5 \cdot 10^{-5}\cos(200\pi t) - 2.07 \cdot 10^{-5}\text{sen}(200\pi t)) \\ 2(-0.2655\cos(120\pi t) + 0.0013\text{sen}(120\pi t)) - 2(-0.0225\cos(200\pi t) + 0.0226\text{sen}(200\pi t)) \end{bmatrix}$$

La solución completa es,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{x}(0)] + \mathbf{L}^{-1}[\Phi(s)\mathbf{BF}(s)] = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t).$$

4.2.2 Solución en dominio del tiempo

La solución en dominio del tiempo está dada por (45). Si se utiliza la convolución en tiempo, la solución del sistema de ecuaciones es,

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.56 - 1.67i \\ 0.13 + 0.05i \\ 0.26 + 0.11i \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} 0.56 + 1.67i \\ 0.13 - 0.05i \\ 0.26 - 0.11i \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.53 \\ -0.53 \end{bmatrix} e^{\lambda_3 t}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2(t) &= e^{At} \mathbf{B} * \mathbf{f}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0.001 - 1.538i \\ 0.125 + 0.006i \\ 0.250 + 0.021i \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} 0.001 + 1.538i \\ 0.125 - 0.006i \\ 0.250 - 0.021i \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.015 \\ -0.015 \end{bmatrix} e^{\lambda_3 t} + \\
&\begin{bmatrix} 0.0001 - 1.6297i \\ -0.1327 - 0.0067i \\ -0.2654 - 0.0221i \end{bmatrix} \cos(120\pi t + \theta_1) + \begin{bmatrix} 0.0001 + 1.6297i \\ -0.1327 + 0.0067i \\ -0.2654 + 0.0221i \end{bmatrix} \cos(120\pi t + \theta_2) + \\
&\begin{bmatrix} -0.08 \cdot 10^{-4} \\ 0.62 \cdot 10^{-4} \\ -0.63 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \cos(120\pi t + \theta_3) + \begin{bmatrix} -0.0014 + 1.13i \\ 0.01 + 0.0007i \\ 0.0212 + 0.002i \end{bmatrix} \cos(200\pi t + \varphi_1) + \\
&\begin{bmatrix} -0.0014 - 1.13i \\ 0.01 - 0.0007i \\ 0.0212 - 0.002i \end{bmatrix} \cos(200\pi t + \varphi_2) + \begin{bmatrix} 0.0028 \\ -0.0212 \\ 0.0212 \end{bmatrix} \cos(200\pi t + \varphi_3)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + e^{At} * \mathbf{Bf}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t),$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0.8833 + 12.2141i, \lambda_2 = -0.8833 - 12.2141i, \lambda_3 = -0.1334, \\
\theta_1 &= -0.0023 + 0.0324i, \theta_2 = -0.0023 - 0.0324i, \theta_3 = -0.0004, \\
\varphi_1 &= 0.7840 + 0.0194i, \varphi_2 = 0.7840 - 0.0194i, \varphi_3 = 0.7852.
\end{aligned}$$

4.2.3 Método de Euler

La implementación numérica del método de Euler lleva al esquema (48). Con $h = 0.0001$, el esquema de solución es

$$\begin{bmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \times 10^{-3} & 5 \times 10^{-3} \\ -1 \times 10^{-4} & 1 & -1 \times 10^{-4} \\ -2 \times 10^{-4} & -1 \times 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 \times 10^{-4} & 0 \\ 2 \times 10^{-4} & -2 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \text{sen}(120\pi n h) \\ 200 \text{sen}(200\pi n h + \pi/4) \end{bmatrix}.$$

4.2.4 Método de Euler-modificado o regla trapezoidal

La implementación numérica de este método lleva al esquema en (50). Con $h = 0.0001$, el esquema de solución es

$$\begin{bmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \times 10^{-3} & 5 \times 10^{-3} \\ -1 \times 10^{-6} & 1 & -5 \times 10^{-5} \\ -2 \times 10^{-4} & -1 \times 10^{-4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 \times 10^{-5} & 0 \\ 1 \times 10^{-6} & -1 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100[\text{sen}(120\pi(n+1)h) + \text{sen}(120\pi nh)] \\ 200[\text{sen}(200\pi(n+1)h + \pi/4) + \text{sen}(200\pi nh + \pi/4)] \end{bmatrix}$$

4.2.5 Método de Runge-Kutta

La implementación numérica de este método lleva al esquema en (61). Con $h = 0.0001$, el esquema de solución es

$$\begin{bmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + \frac{1 \times 10^{-4}}{2} [\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2]$$

donde

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 50 \\ -1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & -1 & -1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100\text{sen}(120\pi nh) \\ 20\text{sen}(200\pi nh + \pi/4) \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 50 & 50 \\ -1 & -0.5 & -0.5 \\ -2 & -1 & -1.4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_2^n \end{bmatrix} + h\mathbf{k}_1 \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100\text{sen}(120\pi(n+1)h) \\ 20\text{sen}(200\pi(n+1)h + \pi/4) \end{bmatrix}$$

4.2.6 Análisis de resultados

La figura 5 muestra la simulación de la variable de estado x_i y los errores al utilizar la solución analítica obtenida mediante la transformación de Laplace como referencia. Se puede notar a simple vista como la convolución en tiempo acarrea errores de redondeo debidos al proceso numérico en la computadora. De los métodos numéricos, se puede notar en las figuras como el método de Runge-Kutta para este caso es más preciso; le siguen la regla trapezoidal y Euler.

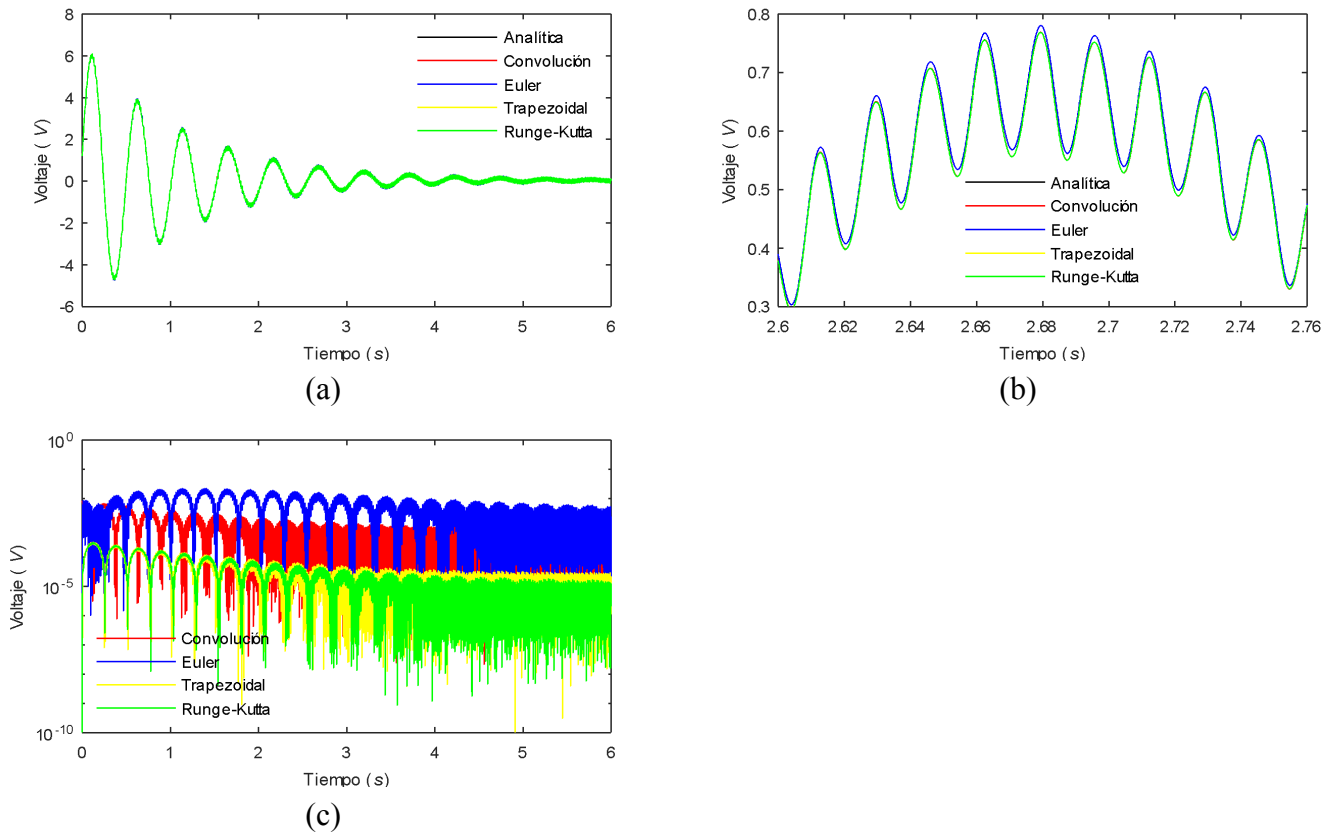


Figura 5. (a) Soluciones para el estado $x_1(t)$. (b) Acercamiento de las soluciones para el estado $x_1(t)$. (c) Error de las soluciones.

5. Conclusiones

Aparentemente, cuando se resuelve una EDO las formas de solución son conocidas, pero si esta EDO es de alto orden hay pocos resultados que indiquen cual es el método más adecuado para su solución.

Para el caso de la EDO explorada, se obtuvo la solución analítica mediante la transformación de Laplace, pero no se pudo obtener de manera satisfactoria la solución mediante la transformada z .

De manera inesperada, se encontró que la ecuación en diferencias partiendo tanto de diferencias divididas de Newton como de la transformada z resultó en un sistema estable.

Para el caso de un sistema de ecuaciones, al ser de tamaño tan pequeño, 3 por 3 en este caso, se pudo obtener la solución analítica; sin embargo, en un sistema de 7 por 7 es casi imposible obtener la inversa de la función de transferencia en forma analítica y la convolución en tiempo es en extremo complicada.

Se utilizó un sistema pequeño para poder evaluar los métodos numéricos; en él se pudo notar que el método de Runge-Kutta es el que mejor precisión tuvo, seguido por la regla trapezoidal y, finalmente, Euler.

Para una EDO de alto orden se concluye que, si es posible obtener la solución analítica mediante la transformación de Laplace, esa sería la mejor opción debido a que los métodos numéricos para este tipo de

ecuaciones no dan buenas soluciones. Si se desea resolver un sistema de ecuaciones pequeño, lo mejor solución es la analítica obtenida mediante la transformación de Laplace o la convolución en tiempo; sin embargo, si el sistema es lo suficientemente grande para que se complique la obtención de la solución analítica, entonces los métodos numéricos dan soluciones estables y de buena precisión.

6. Agradecimientos

Reconocimiento:

Trabajo financiado por PRODEP, apoyo con folio UDG-PTC-1414.

7. Referencias

- [1] Leonhard Euler, “Introductio in analysin infinitorum” (Lausanne, Switzerland. Marc Michel Bousquet & Co., 1748), volume 1 and II.
- [2] Isaac Newton “De analysi per aequationes numero terminorum infinitas”, (1669, publicado en 1711).
- [3] Spiegel, Murray R., “Transformadas de Laplace”, (2014) Mc Graw Hill / Interamericana de México, México D.F.
- [4] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F. (2004), “MacTutor History of Mathematics archive”, Universidad de Saint Andrews.
- [5] Oppenheim, Alan V., Ronald W. Schafer, and John R. Buck, “Discrete-Time Signal Processing”, 2nd Ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- [6] L. R. Burden, J. D. Faires, “Numerical analysis”, Brooks/Cole 20 Channel Center Street, Boston MA 002210 USA. Night edition, ISBN-13: 978-0-538-73351-9, CENGAGE Learning.
- [7] José Alberto Gutiérrez-Robles, Miguel Ángel Olmos Gómez, Juan Martín Casillas González, “Análisis Numérico”, Editorial McGraw-Hill, ISBN: 978-607-15-0316-9, 433 páginas.
- [8] Hwei P. Hsu, “Fourier Analysis”, Simon & Schuster, Inc., 1970.
- [9] D.J. Wilcox, “Numerical Laplace Transformation and Inversion”, Int. J. Elect. Enging. Educ., Vol. 15, pp. 247-265, 1978.
- [10] J. D. Hoffman, “Numerical methods for engineers and scientists”, McGraw-Hill International Editions ISBN: 0-07-029213-2.
- [11] Noda, T.; Ramirez, A., “z -Transform-Based Methods for Electromagnetic Transient Simulations”, Power Delivery, IEEE Transactions on, ISSN 0885-8977, vol.22, no.3, pp.1799-1805, July 2007.
- [12] P. W. Williams, “Numerical computation”, Nelson Edition, boards: 0-17-761018-2, paper: 0-17-771018-7, 1972, 191 pages.

- [13] Kinkaid D. R., Hayes L. J. (1990). "Iterative Methods for Large Linear Systems", Academic Press Inc. Hancourt Brace Jovanovich.
- [14] Strikwerda J. (1989). "Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations", First Edition, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software, Pacific Grove, California.
- [15] William R. Derrick., "Complex Analysis and Applications", Second Edition, William R. Derrick. Wadsworth, Inc., Copyright © 1984, en Estados Unidos de América. ISBN 0-534-02853-5.
- [16] John G. Proakis, Northeastern University, Dimitris K Manolakis, Massachusetts Institute of Technology, Lincoln Laboratory "Digital Signal Processing", 4th Edition, Pearson, 2007.
- [17] B. P. Lathi, "Linear Systems and Signals", Berkeley Cambridge Press, ISBN: 0-941413-34-9, 1992.
- [18] B. Gustavsen, A. Semlyen, "A robust approach for system identification the frequency domain", IEEE Transactions on power delivery, vol. 19, no. 3, pp.1167-1173, July 2004.
- [19] Smith G. D. (1977). "Numerical Solution of Partial Differential Equations, Finite Difference Methods", Second Edition, Clarendon Press, Oxford.
- [20] Wilkinson J. H. (1965). "The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press, Oxford.